

Sifat istimewa integral tentu: *King's Property*, Mengapa tidak dikenal di Indonesia?

$$\int_a^b f(x) dx = \int_a^b f(a+b-x) dx$$

Sahid

sahidyk@gmail.com, sahid@uny.ac.id

Ketika kuliah Kalkulus dulu, rasa-rasanya saya belum pernah mendengar istilah “King’s property” pada integral tentu. Di buku-buku kalkulus sepertinya juga tidak dibahas. Saya mendapatkan pengetahuan ini justru dari media sosial yang menampilkan beberapa kuliah singkat oleh seorang dosen dari India. Karena menurut saya sifat ini sangat penting, bermanfaat, dan menarik untuk diajarkan, saya menuliskannya di sini, meskipun saya sendiri bukan dosen kalkulus.

King’s property bukanlah teorema baru dalam kalkulus. Secara matematis, ia adalah konsekuensi langsung dari substitusi pada integral tentu, khususnya substitusi refleksi $x \mapsto a + b - x$. Nama King’s property sendiri tampaknya merupakan istilah informal yang populer di lingkungan persiapan ujian matematika di India, bukan terminologi standar dalam buku teks kalkulus internasional.

1. Bentuk umum King’s Property

Misalkan f terintegralkan pada interval $[a, b]$. Maka

$$\int_a^b f(x) dx = \int_a^b f(a+b-x) dx \quad (1)$$

Iniilah yang sekarang banyak disebut **King’s Property**, **King’s Rule**, atau kadang sebagai **reflection property**.

Perhatikan transformasinya:

$$x \longmapsto a + b - x$$

Jika titik tengah interval integrasi adalah

$$m = \frac{a+b}{2},$$

maka

$$a+b-x = 2m-x.$$

Jadi transformasi tersebut sebenarnya adalah **refleksi terhadap titik tengah interval**.

2. Bukti King's Property

Misalkan

$$I = \int_a^b f(x) dx. \quad (2)$$

Jika dilakukan substitusi $x = a + b - t$, maka $dx = -dt$. Batas-batas integrasinya berubah: $x = a \Rightarrow t = b$, dan untuk $x = b \Rightarrow t = a$. Dengan demikian

$$\begin{aligned} I &= \int_a^b f(x) dx \\ &= \int_b^a f(a + b - t)(-dt) \\ &= \int_a^b f(a + b - t) dt. \end{aligned} \quad (3)$$

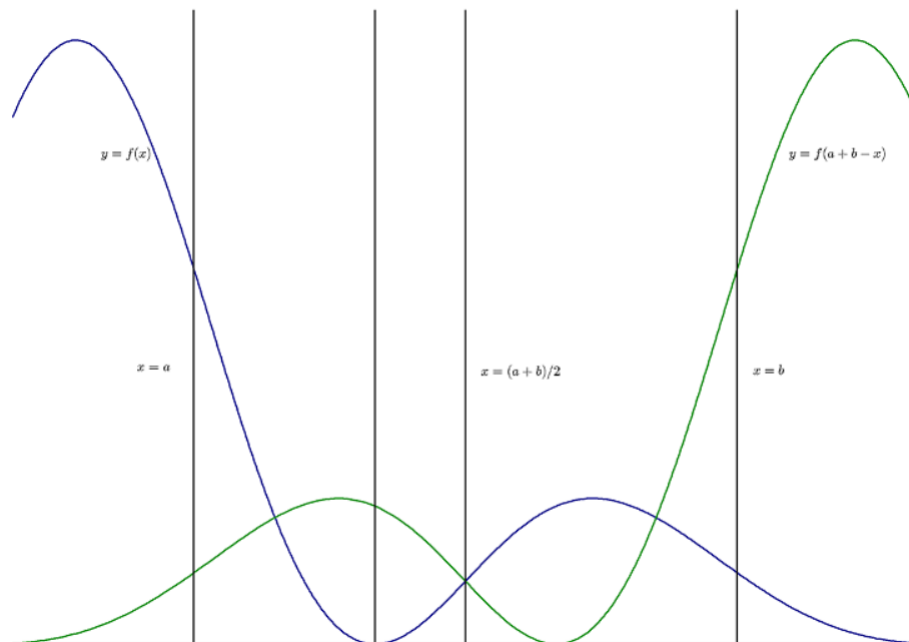
Karena t hanyalah **variabel dummy** dalam integral tentu, kita boleh menggantinya kembali dengan x :

$$\boxed{\int_a^b f(x) dx = \int_a^b f(a + b - x) dx.} \quad (4)$$

Jadi King's Property sebenarnya hanyalah **substitusi** $t = a + b - x$ yang ditulis sebagai suatu aturan khusus. Akan tetapi, ternyata manfaatnya membuat perhitungan integral tentu menjadi jauh lebih sederhana dan mudah (Meskipun pada awalnya, mungkin Anda melihat ruas kanan bentuknya menjadi tanpa lebih rumit, namun dalam penerapannya tidaklah demikian).

3. Makna geometrisnya

Ini justru bagian yang sangat bagus untuk pengajaran kalkulus.



Grafik $y = f(a + b - x)$ merupakan pencerminan grafik $y = f(x)$ terhadap garis vertikal

$$x = \frac{a + b}{2}.$$

Perhatikan, kedua kurva simetris terhadap garis $x = (a + b)/2$. Jadi secara geometris:

$$\int_a^b f(x) dx = \int_a^b f(a + b - x) dx.$$

Dengan kata lain, *King's Property* dapat dipandang sebagai **invariansi integral terhadap refleksi domain** (dalam hal ini refleksi terhadap garis tengah interval integrasi).

4. Bentuk khusus yang paling sering digunakan

a. Interval $[0, a]$

Jika batas bawahnya 0, maka $a + b = a$, sehingga

$$\int_0^a f(x) dx = \int_0^a f(a - x) dx. \quad (5)$$

Ini mungkin merupakan bentuk yang paling sering muncul dalam soal.

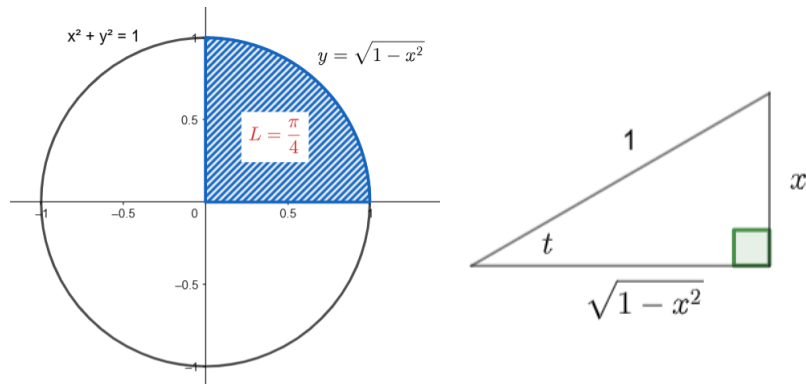
b. Interval $[0, \pi/2]$

Misalnya pada interval $[0, \pi/2]$, $a + b = \frac{\pi}{2}$, sehingga $x \mapsto \frac{\pi}{2} - x$. Akibatnya $\sin x \longleftrightarrow \cos x$. Inilah salah satu manfaat penting sifat tersebut untuk menghitung integral-integral trigonometri. Diperoleh

$$\left| \int_0^{\pi/2} f(x) dx = \int_0^{\pi/2} f\left(\frac{\pi}{2} - x\right) dx. \right| \quad (6)$$

Karena $\sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \cos x$ dan $\cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \sin x$, maka transformasi tersebut **menukar** $\sin x$ **dan** $\cos x$.

Contoh: (Menghitung luas lingkaran)



Bagaimana membuktikan bahwa $\int_0^1 \sqrt{1-x^2} dx = \pi/4$, sebagaimana ditunjukkan pada gambar luas seperempat lingkaran pada gambar sebelah kiri? Untuk menghitung integral ini, biasanya digunakan substitusi trigonometri dengan menggunakan gambar segitiga siku-siku seperti pada gambar sebelah kanan. (**Banyak mahasiswa tidak paham substitusi ini**). Substitusinya adalah:

$$x = \sin t, \text{ sehingga } dx = \cos t dt,$$

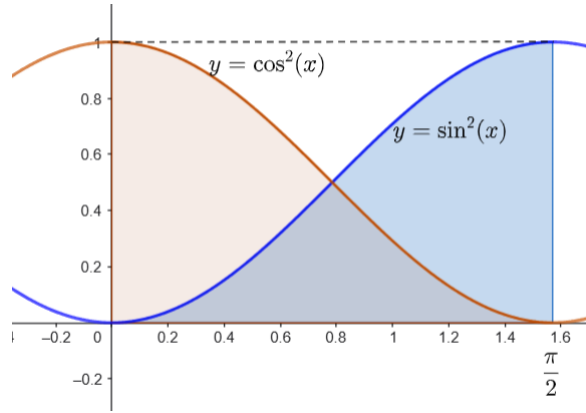
$$\sqrt{1-x^2} = \cos t.$$

$$x = 0 \rightarrow t = 0, \quad x = 1 \rightarrow t = \frac{\pi}{2},$$

sehingga integralnya menjadi

$$\begin{aligned} \int_0^1 \sqrt{1-x^2} dx &= \int_0^{\pi/2} \cos^2 t dt \\ &= \int_0^{\pi/2} \frac{1}{2} (\cos 2t + 1) dt \\ &= \left[\frac{1}{4} \sin 2t + \frac{1}{2} t \right]_{t=0}^{t=\pi/2} \\ &= \frac{\pi}{4}. \end{aligned} \quad (7)$$

Apabila menggunakan sifat simetri, perhitungan integralnya lebih sederhana,



$$\int_0^1 \sqrt{1-x^2} dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2 t dt = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2 t dt = \frac{1}{2} \int_0^{\frac{\pi}{2}} 1 dt = \frac{\pi}{4}. \quad (8)$$

c. Interval $[-a, a]$

Di sini $a + b = 0$, sehingga

$$\boxed{\int_{-a}^a f(x) dx = \int_{-a}^a f(-x) dx.} \quad (9)$$

Ini menghasilkan sifat fungsi genap-ganjil.

Untuk fungsi genap, $f(-x) = f(x)$, sehingga

$$\int_{-a}^a f(x) dx = 2 \int_0^a f(x) dx. \quad (10)$$

$$\text{Untuk fungsi ganjil, } f(-x) = -f(x), \text{ sehingga } \int_{-a}^a f(x) dx = 0. \quad (11)$$

Jadi, sifat genap-ganjil sendiri dapat dilihat sebagai kasus khusus dari refleksi integral.

5. Bentuk yang lebih kuat: menjumlahkan dua representasi

Inilah sebenarnya **kekuatan utama King's Property**. Dari

$$I = \int_a^b f(x) dx \quad (12)$$

dan

$$I = \int_a^b f(a+b-x) dx, \quad (13)$$

kita dapat menjumlahkannya:

$$2I = \int_a^b [f(x) + f(a+b-x)] dx. \quad (14)$$

Jadi

$$I = \frac{1}{2} \int_a^b [f(x) + f(a+b-x)] dx. \quad (15)$$

Ini merupakan bentuk yang **jauh lebih berguna secara operasional** daripada sekadar rumus asli *King's Property*.

6. Bentuk khusus yang sangat penting

Jika ternyata $f(x) + f(a+b-x) = C$, dengan C konstanta, maka $2I = \int_a^b C dx = C(b-a)$, sehingga

$$I = \frac{C}{2}(b-a). \quad (16)$$

Ini dapat membuat integral yang tampaknya sangat sulit menjadi sangat sederhana, seperti sudah ditunjukkan pada contoh di atas.

7. Contoh klasik:

$$\int_0^{\pi/2} \frac{\sin x}{\sin x + \cos x} dx$$

Misalkan

$$I = \int_0^{\pi/2} \frac{\sin x}{\sin x + \cos x} dx. \quad (17)$$

Dengan *King's Property*,

$$I = \int_0^{\pi/2} \frac{\sin(\pi/2 - x)}{\sin(\pi/2 - x) + \cos(\pi/2 - x)} dx. \quad (18)$$

Gunakan

$$\sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \cos x \quad (19)$$

dan

$$\cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \sin x. \quad (20)$$

Maka

$$I = \int_0^{\pi/2} \frac{\cos x}{\cos x + \sin x} dx. \quad (21)$$

Jumlahkan:

$$2I = \int_0^{\pi/2} \left[\frac{\sin x}{\sin x + \cos x} + \frac{\cos x}{\sin x + \cos x} \right] dx. \quad (22)$$

Maka

$$2I = \int_0^{\pi/2} 1 \, dx = \frac{\pi}{2}. \quad (23)$$

Jadi

$$\boxed{I = \frac{\pi}{4}}. \quad (24)$$

Yang menarik, kita sama sekali tidak perlu mencari antiturunan integrannya.

$$\int_0^{\pi/2} \frac{\sin x}{\sin x + \cos x} \, dx = \frac{\pi}{4}. \quad (25)$$

Cobalah menyelesaikan integral tersebut tanpa menggunakan sifat *King's property*, seberapa lama dan sulit.

8. Contoh yang lebih umum

Perhatikan

$$I = \int_0^{\pi/2} \frac{5 \sin x + 3 \cos x}{\sin x + \cos x} \, dx. \quad (26)$$

Dengan *King's Property*,

$$I = \int_0^{\pi/2} \frac{5 \cos x + 3 \sin x}{\cos x + \sin x} \, dx. \quad (27)$$

Jumlahkan:

$$\begin{aligned} 2I &= \int_0^{\pi/2} \frac{5 \sin x + 3 \cos x + 5 \cos x + 3 \sin x}{\sin x + \cos x} \, dx \\ &= \int_0^{\pi/2} \frac{8 \sin x + 8 \cos x}{\sin x + \cos x} \, dx \\ &= \int_0^{\pi/2} 8 \, dx \\ &= 4\pi. \end{aligned} \quad (28)$$

Jadi

$$\boxed{I = 2\pi}. \quad (29)$$

Soal semacam ini sangat cocok untuk menunjukkan kepada mahasiswa bahwa **strategi integral tentu tidak selalu mencari antiturunan** (menggunakan teorema dasar Kalkulus). Cobalah menyelesaikan integral tersebut tanpa menggunakan sifat *King's property*. Seberapa lama dan sulit?

9. Contoh dengan fungsi eksponensial

Misalnya

$$I = \int_{-a}^a \frac{f(x)}{1 + e^x} dx, \quad (30)$$

dengan f fungsi genap.

Karena intervalnya $[-a, a]$, $x \mapsto -x$.

Maka

$$I = \int_{-a}^a \frac{f(-x)}{1 + e^{-x}} dx. \quad (31)$$

Karena f genap, $f(-x) = f(x)$.

Sekarang gunakan fakta:

$$\frac{1}{1 + e^x} + \frac{1}{1 + e^{-x}} = 1. \quad (32)$$

Maka

$$2I = \int_{-a}^a f(x) dx. \quad (33)$$

Jadi

$$\boxed{I = \frac{1}{2} \int_{-a}^a f(x) dx.} \quad (34)$$

Misalnya jika $f(x) = \sin^2 x$, maka

$$\boxed{\int_{-a}^a \frac{\sin^2 x}{1 + e^x} dx = \frac{1}{2} \int_{-a}^a \sin^2 x dx.} \quad (35)$$

Ini adalah salah satu pola yang sangat elegan.

10. Contoh yang bahkan lebih umum

Perhatikan integral

$$I = \int_0^a \frac{g(x)}{g(x) + g(a-x)} dx. \quad (36)$$

King's Property memberikan

$$I = \int_0^a \frac{g(a-x)}{g(a-x) + g(x)} dx. \quad (37)$$

Jumlahkan:

$$2I = \int_0^a \frac{g(x) + g(a-x)}{g(x) + g(a-x)} dx. \quad (38)$$

Maka $2I = \int_0^a 1 dx = a$.

Dengan demikian

$$\boxed{\int_0^a \frac{g(x)}{g(x) + g(a-x)} dx = \frac{a}{2}.} \quad (39)$$

Perhatikan bahwa kita bahkan **tidak perlu mengetahui bentuk** $g(x)$.

Ini menunjukkan kekuatan *King's property*.

11. Bentuk lain yang sering muncul

Terdapat juga bentuk:

$$\boxed{\int_a^b f(x) dx = \frac{1}{2} \int_a^b [f(x) + f(a+b-x)] dx.} \quad (40)$$

Jika $f(x) - f(a+b-x) = 0$, maka jelas integral tersebut merupakan bagian simetris.

Sebaliknya, jika $f(x) + f(a+b-x) = 0$, maka

$$\boxed{\int_a^b f(x) dx = 0.} \quad (41)$$

Ini merupakan generalisasi sifat fungsi ganjil.

12. Hubungannya dengan substitusi

Secara konseptual, King's Property **bukan metode integrasi yang terpisah dari substitusi**, melainkan akibat dari substitusi khusus $x = a + b - t$. Jadi,

King's Property adalah cara khusus untuk mengenali dan mengeksploitasi substitusi refleksi yang mempertahankan interval integrasi.

Lantas, dari mana nama "King's Property" berasal? Ternyata jawabannya cukup menarik. Tidak ditemukan bukti historis yang kuat bahwa sifat ini ditemukan oleh seorang matematikawan bernama King. Istilah tersebut bukan berasal dari nama historis standar. Sebuah diskusi di **Mathematics Stack Exchange** secara eksplisit menanyakan asal-usul nama *King's Property*. Jawaban yang muncul menyatakan bahwa istilah tersebut hampir tidak ditemukan dalam literatur matematika umum, dan salah satu jawaban mengaitkannya dengan lingkungan persiapan ujian JEE di India. ([Mathematics Stack Exchange](#))

Lebih menarik lagi, beberapa sumber mengaitkan popularitas istilah **King's Rule** dengan **V. K. Bansal**, pendiri Bansal Classes di Kota, India. Menurut keterangan yang muncul dalam diskusi tersebut, Bansal memberi nama-nama informal seperti *King's Rule*, *Queen's Rule*, dan sebagainya kepada sejumlah teknik matematika yang digunakan dalam pengajaran persiapan JEE ([Mathematics Stack Exchange](#)). Mungkin nama sifat ini diambil dari sifat kartu remi J, K, Q, yang apabila dibalik posisinya gambarnya tetap terlihat sama.



13. Apakah istilah ini dikenal di dunia internasional?

Tampaknya, istilah ini tidak dikenal sebagai terminologi standar. Dalam buku-buku kalkulus standar, kita lebih sering menemukan konsep yang sama sebagai: *change of variables*, *substitution in definite integrals*, *symmetry of definite integrals*, *reflection symmetry*, *even/odd symmetry*, *properties of definite integrals*.

Mengapa sangat populer di India? Ini berkaitan dengan budaya pengajaran matematika untuk **JEE (Joint Entrance Examination)**. Dalam persiapan JEE, terdapat perhatian besar pada **problem-solving tricks**, **pattern recognition**, dan **elegant transformations**. *King's Property* sangat cocok dengan budaya tersebut karena sebuah integral yang kelihatannya membutuhkan teknik rumit dapat diselesaikan hanya dengan: $x \rightarrow a - x$ atau $x \rightarrow a + b - x$.

Sumber-sumber pembelajaran JEE secara eksplisit memasukkan *King's Property* sebagai salah satu sifat integral tentu dan memberikan contoh seperti ([JEE Notes](#)):

$$\int_0^{\pi/2} \frac{\sin x}{\sin x + \cos x} dx. \quad (42)$$

Menariknya, sumber Jepang yang membahas *King Property* juga menunjukkan bahwa teknik ini digunakan dalam sejumlah soal ujian masuk universitas Jepang ([note \(ノー卜\)](#)).

14. Mengapa tidak diajarkan sebagai "King's Property" di Indonesia?

Mungkin berikut ini adalah beberapa alasannya.

a. Secara matematis ia dianggap hanya substitusi

Dalam kurikulum kalkulus Indonesia, dosen biasanya mengajarkan $u = g(x)$ sebagai metode substitusi integral tentu. Maka $u = a + b - x$ dianggap hanya salah satu contoh substitusi.

Tidak ada kebutuhan formal untuk memberinya nama baru. Jika demikian, mengapa substitusi trigonometri seperti yang dicontohkan di atas dibahas di dalam buku-buku kalkulus umum? Sebuah pertanyaan yang menarik untuk dicari tahu jawabnya, sebagai sebuah fenomenologi didaktik.

b. Tradisi buku teks Indonesia mengikuti tradisi kalkulus internasional

Buku kalkulus umumnya membahas:

- sifat integral tentu;
- substitusi;
- integrasi parsial;
- integral trigonometri;
- integral rasional;
- aplikasi integral;
- teorema dasar kalkulus.

Sementara itu, trik khusus seperti *King's Property* biasanya tidak dibahas tersendiri. Sekali lagi, apakah hal ini karena ketidaktahuan?

c. Pembelajaran kalkulus sering berorientasi pada "mencari antiturunan"

Mungkin ini merupakan isu pedagogis yang lebih penting.

Mahasiswa sering dibiasakan berpikir:

Untuk menentukan $\int f(x) dx$, cari fungsi F , yang memenuhi $F'(x) = f(x)$, (43)

yang lebih dikenal sebagai teorema dasar kalkulus.

Padahal, untuk integral tentu, terdapat strategi lain, yakni prinsip metode substitusi:

Ubah fungsi (integran)-nya tanpa mengubah nilai integralnya.
--

 (44)

King's Property mengajarkan cara berpikir kedua.

d. Istilahnya memang bukan istilah akademik universal

Apabila dosen matematika di Indonesia (mungkin) tidak pernah mendengar istilah *King's Property*, itu bukan berarti konsepnya tidak dikenal. Konsepnya sangat dikenal. Yang tidak umum adalah nama "*King's Property*". Sudah tentu konsep substitusi variabel di dalam perhitungan integral tentu bukan hal asing atau baru, namun substitusi khusus yang bersifat simetris tersebut tampaknya belum banyak dibahas di dalam perkuliahan kalkulus di Indonesia.

15. Sebuah peluang pedagogis yang menarik

Mengingat manfaatnya yang sangat memudahkan perhitungan integral tentu, pengajaran Kalkulus di perguruan tinggi Indonesia, apabila memang belum memperkenalkan sifat integral tentu tersebut, perlu memperkenalkan secara eksplisit sifat *King's property* tersebut, namun bukan sebagai "trik sulap".

Ketika membahas masalah integral tentu dengan metode substitusi, perlu diperkenalkan juga substitusi khusus atau transformasi: $x \mapsto a + b - x$, kemudian membandingkan grafik kedua fungsinya.

Dari sana mahasiswa dapat menemukan sendiri:

$$\int_a^b f(x) dx = \int_a^b f(a + b - x) dx. \quad (45)$$

Selanjutnya, meningkat ke penemuan bentuk identitas:

$$\boxed{\int_a^b f(x) dx = \frac{1}{2} \int_a^b [f(x) + f(a + b - x)] dx.} \quad (46)$$

Akhirnya mahasiswa belajar **mengenali struktur**, bukan menghafal trik.

Bahkan sifat tersebut dapat dijadikan sebagai "meta-strategy" integral tentu, dan mungkin ini merupakan hal yang paling bernilai untuk pembelajaran.

Ketika melihat

$$I = \int_a^b f(x) dx, \quad (47)$$

mahasiswa tidak hanya bertanya, "Apa antiturunannya?" tetapi juga bertanya, "Apakah integrannya dapat disederhanakan jika intervalnya direfleksikan?"

Secara algoritmik, apabila dilakukan transformasi:

$$\boxed{f(x) \longrightarrow f(a + b - x)} \quad (48)$$

apakah $f(x) + f(a + b - x)$ lebih sederhana daripada $f(x)$?

Jika ya, gunakan:

$$\left| 2I = \int_a^b [f(x) + f(a+b-x)] dx. \right| \quad (49)$$

Ini merupakan strategi struktural, bukan sekadar teknik menghitung integral tentu. Hal ini sekaligus memberikan **ide penelitian** untuk membandingkan antara kemampuan mahasiswa yang tidak diperkenalkan secara eksplisit *King's property* dan kemampuan mahasiswa yang diperkenalkan secara eksplisit sifat tersebut dalam menyelesaikan soal-soal integral tentu.

16. Kesimpulan

Sifat integral tentu yang dikenal dengan nama *King's Property*, secara matematis adalah:

$$\int_a^b f(x) dx = \int_a^b f(a+b-x) dx. \quad (50)$$

Sifat ini sebagai akibat langsung dari substitusi $x = a + b - t$. Secara geometris, identitas tersebut adalah invariansi integral pada refleksi terhadap titik tengah interval integrasi. Bentuk yang paling *powerful* adalah:

$$2I = \int_a^b [f(x) + f(a+b-x)] dx. \quad (51)$$

Kasus khusus untuk interval integrasi $[0, a]$ adalah:

$$\int_0^a f(x) dx = \int_0^a f(a-x) dx. \quad (52)$$

Sementara, kasus khusus untuk interval integrasi $[0, \pi/2]$: $x \mapsto \frac{\pi}{2} - x$, mengakibatkan integrasi $\sin x$ dan $\cos x$ dapat saling ditukar.

Tidak terdapat bukti kuat bahwa sifat ini ditemukan oleh seseorang bernama King. Nama tersebut tampaknya merupakan istilah informal yang dipopulerkan dalam tradisi persiapan JEE di India, dan sering dikaitkan dengan nama V. K. Bansal ([Mathematics Stack Exchange](#)). Istilah ini bukan merupakan terminologi standar kalkulus internasional. Nama “King”, atau sebutan lain “Queen”, kemungkinan dikaitkan dengan sifat simetris kartu “King” dan “Queen” pada kartu remi.

Meskipun di Indonesia konsep substitusi dan sifat simetri integral sudah banyak dibahas, tetapi biasanya tidak secara khusus membahas sifat “King's property” tersebut. Secara pedagogis, sifat tersebut sangat layak diajarkan secara eksplisit, terutama untuk menggeser cara berpikir mahasiswa dari “mencari antiturunan” menuju “mengeksplorasi struktur dan simetri integral tentu”, bahkan dapat menjadi **ide penelitian** salah satu strategi pembelajaran kalkulus, khususnya integral tentu.