Antara Teorema Pythagoras dan Trigonometri: Saling Tergantung atau Bebas?

Sahid
Departemen Pendidikan Matematika FMIPA UNY
sahid@uny.ac.id, sahidyk@gmail.com

Abstrak

Selama ini diyakini bahwa trigonometri tidak dapat digunakan untuk membuktikan teorema Pythagoras, karena beberapa identitas trigonometri dianggap sebagai konsekuensi dari teorema Pythagoras. Akan tetapi keyakinan tersebut ternyata salah, karena identitas trigonometri dapat dibuktikan tanpa harus menggunakan teorema Pythagoras. Identitas trigonometri berlaku untuk semua nilai sudut atau semua bilangan riil, sedangkan teorema Pythagoras terbatas pada segitiga siku-siku dan tidak memiliki arti untuk nilai-nilai sudut di mana identitas trigonometri tetap berlaku, misalnya nol. Adanya kenyataan ini berdampak pada perlunya meninjau kembali cara-cara menyajikan topik yang terkait dengan teorema Pythagoras dan trigonometri pada buku-buku matematika maupun pelajaran matematika, serta cara dan pendekatan pembelajaran topik-topik tersebut.
Kata kunci: teorema Pythagoras, identitas trigonometri

Pendahuluan

Pada tahun lalu, sejak Maret 2023, di USA (Internet) viral berita tentang penemuan "bukti baru" teorema Pythagoras, setelah dua siswa SMA, Calcea Johnson dan Ne'Kiya Jackson dari St. Mary's Academy, New Orlean, menyajikan sebuah presentasi berjudul "*An Impossible Proof of Pythagoras*" pada pertemuan **AMS Spring Southeastern Section** tanggal 18 Maret 2023. Lihat **Gambar 1, 2, 3** di bawah ini tentang hal tersebut. Kata "impossible" di dalam judul tersebut didasarkan pada pernyataan dan (keyakinan yang selama ini ada di kalangan matematikawan, guru matematika, siswa, dan umum) bahwa teorema Pythagoras tidak mungkin dibuktikan menggunakan trigonometri (tanpa menggunakan penalaran sirkular). Pernyataan ini secara eksplisit terdapat di dalam buku "*The Pythagorean Proposition*" karya Elisha Scott Loomis, seorang profesor matematika dari Universitas Baldwin (1885-1895). Lihat **Gambar 4** untuk melihat pernyataan asli pada buku tersebut.

Buku tersebut ditulis pada 1907, diterbitkan pada 1927, dan edisi keduanya diterbitkan pada 1940 dan diterbitkan kembali oleh NCTM pada 1968 dan dicetak ulang pada 1972. Loomis menganalisis, mendemonstrasikan, dan mengklasifikasikan 615 bukti menjadi empat kategori. Di dalamnya disebutkan secara eksplisit bahwa bukti teorema Pythagoras menggunakan trigonometri adalah tidak mungkin, karena trigonometri itu sendiri didasarkan pada teorema Pythagoras. Secara eksplisit, keyakinan yang selama ini adalah bahwa identitas trigonometri

$$\sin^2(\alpha) + \cos^2(\alpha) = 1 \tag{1}$$

tergantung pada teorema Pythagoras

$$a^2 + b^2 = c^2, \tag{2}$$

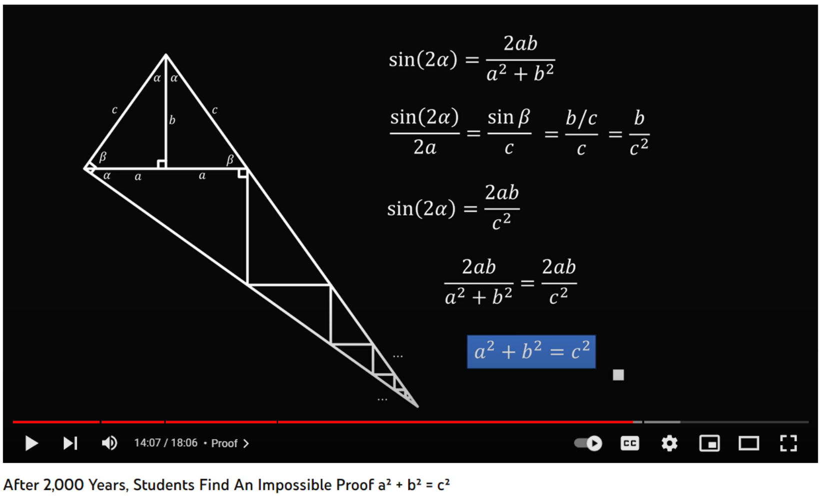
dengan a dan b adalah panjang dua sisi yang saling tegak lurus pada segitiga siku-siku dan c adalah panjang sisi miringnya. Identitas trigonometri (1) juga sering dikatakan sebagai bentuk lain teorema Pythagoras (2), bahkan diberi nama **identitas Pythagoras**. Benarkah demikian?

Artikel ini membahas bahwa (1) dan (2) merupakan dua fakta yang tidak saling tergantung. Masing-masing dapat dibuktikan tanpa bergantung pada yang lain. Sudah tentu keduanya saling berkaitan dan hubungannya merupakan biimplikasi untuk domain terbatas. Selain itu, nanti juga akan ditunjukkan bukti (2) yang disajikan oleh kedua anak SMA tersebut serta modifikasinya yang lebih sederhana. Pada bagian akhir artikel ini akan dibahas konsekuensi dari kenyataan ini sebagai simpulan.

Teorema Pythagoras: Sejarah dan Pembuktiannya

Semua orang yang pernah sekolah, setidaknya lulus sekolah dasar, sudah mengenal teorema Pythagoras (2). Pada setiap segitiga siku-siku, jumlah kuadrat kedua sisi siku-siku sama dengan kuadrat sisi miringnya. Teorema ini sangat terkenal, bahkan orang awam pun mungkin juga mengetahuinya. Penerapan teorema Pythagoras juga sangat luas, tidak hanya di dalam matematika, melainkan juga dalam bidang-bidang yang lain seperti fisika dan teknik. Ribuan buku, artikel jurnal, dan artikel populer yang terkait teorema Pythagoras sudah ditulis dan tersebar di seluruh dunia. **Tabel 1** menyajikan data hasil pelacakan menggunakan mesin pencari **Google** dan **Microsoft Bing** dengan kata kunci terkait nama "Pythagoras".

Gb. 1. Halaman Web AMS yang memuat informasi presentasi bukti "baru" tersebut
Sumber: Web AMS(https://meetings.ams.org/math/spring2023se/meetingapp.cgi/Paper/23621) (1-8-2023)



Gb. 2. Ringkasan bukti teorema Pythagoras oleh kedua siswi SMA.
Sumber: https://www.youtube.com/watch?v=juFdo2bijic (3-8-2023)

Gb. 3. Kedua anak SMA tersebut dalam wawancara dengan stasiun TV di AS.
Sumber: https://www.youtube.com/watch?v=YQ5Pz9qh25w (3-8-2023)

Tabel 1. Hasil pencarian Pythagoras oleh Google dan Microsoft Bing (2 Agustus 2023: 10:15)

Kata kunci	Google	Microsoft Bing
`teorema Pythagoras`	544.000	275.000
`Pythagorean theorem`	7.280.000	1.460.000
`Pythagoras theorem`	29.900.000	1.200.000
`tripel Pythagoras`	69.900	140.000
`Pythagorean triple`	152.000	2.020.000
`Pythagoras`	48.400.000	165.000
`rumus Pythagoras`	56.800	213.000
`Pythagorean formula`	52.000	1.020.000

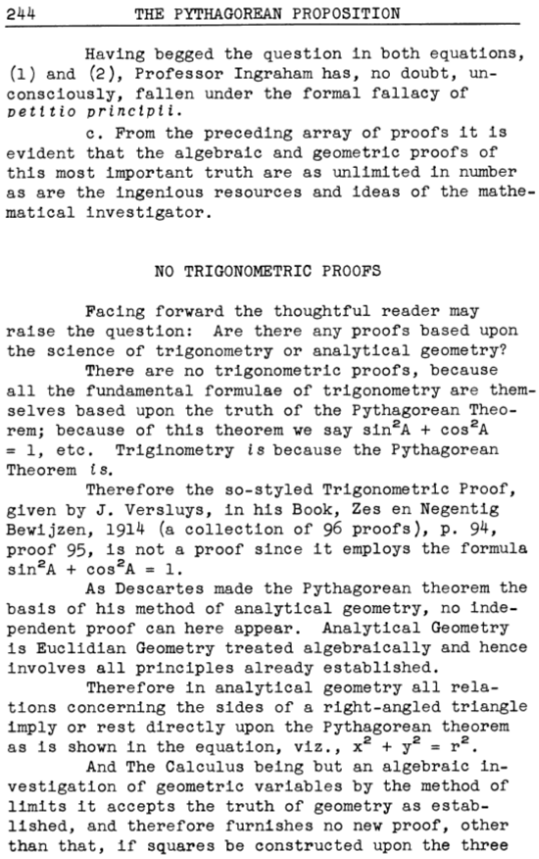
Teorema Pythagoras atau dalam bentuk konsep dasar tentang hubungan panjang sisi-sisi pada segitiga siku-siku telah diketahui oleh para sarjana kuno dan pendiri bangunan di Mesir, Babilonia, Cina, dan India kuno. Meskipun Pythagoras hidup dan menulis pada tahun 569–475 SM, hasil yang sekarang menggunakan namanya sudah ada sejak tahun 1800 SM di dalam tablet tanah liat Babilonia yang ditemukan para ahli. Teorema Pythagoras juga dikenal oleh para sarjana Tiongkok awal dan muncul dalam teks-teks suci India kuno yang berkaitan dengan pembangunan altar. Berikut adalah ringkasan sejarah teorema Pythagoras, dirangkum dari situs History of Mathematics Project, Timetoast Timelines, dan Britanica Online.

Sekitar tahun 2500 SM di Mesir sudah digunakan tali dengan simpul berukuran 3–4-5. Pada tahun 2000 – 1900 SM orang-orang Babilonia sudah mengenal tripel Pythagoras. Tripel Pythagoras ditulis pada tablet-tablet dari tanah liat mereka. Tahun 1900 – 600 SM mereka sudah mampu menyajikan $\sqrt{2}$ dengan basis 60 dan orang-orang Babilonia menggunakan teorema Pythagoras dalam tiga dimensi. Tahun 1800 SM orang-orang Mesir sudah menghitung tripel Pythagoras. Pada kurun 1790 – 1750 SM Plimpton 322 (tablet nomor 322) memuat daftar tripel Pythagoras. Pada tahun 1600 SM teorema Pythagoras sudah ditulis dalam bentuk aljabar. Pada kurun waktu 800 – 500 SM Baudhayana Sulba-sutra di India kuno menyebutkan pernyataan yang ekuivalen dengan teorema Pythagoras dan orang India kuno sudah membangun altar perapian berbentuk persegi panjang dan persegi. Tahun 600 SM Apastamba Sulbasutra memuat bukti numerik. Pada era 569 – 475 SM Pythagoras menemukan teorema tersebut dan menyusun tripel Pythagoras. Pada tahun 400 SM Plato memberikan suatu metode yang menggabungkan aljabar dan geometri untuk mencari tripel Pythagoras. Pada tahun 300 SM Euclid membuktikan teorema Pythagoras di dalam bukunya *The Elements*.

Sejak ribuan tahun yang lalu, teorema ini telah dibuktikan berkali-kali dengan berbagai metode, termasuk aljabar dan geometri. Terdapat lebih dari 300 bukti yang sudah ditulis dan dikumpulkan pada berbagai literatur. Mungkin teorema Pythagoras adalah satu-satunya teorema yang memiliki paling banyak bukti dibandingkan dengan teorema matematika yang mana pun (Wikipedia, 2023). Menurut Loomis (1968), terdapat tak berhingga bukti aljabar maupun bukti geometris untuk teorema Pythagoras, namun bukti dengan trigonometri tidaklah mungkin.

Pada abad pertama Masehi muncul karya anonimous yang monumental di Cina yang berjudul *Jiuzhang suanshu* (*Nine Chapters on the Mathematical Procedures/Art* atau *The Nine Chapters*) yang menyajikan prosedur (bentuk lain teorema Pythagoras) terkait segitiga siku-siku. Karya ini sejajar dengan *The Elements* karya Euclid. Tahun sekitar 150 M Ptolemy menyampaikan teorema segi empat. Pada era 202 SM – 220 M tripel Pythagoras dimuat di dalam karya-karya Cina. Pada sekitar tahun 320 M, matematikawan Yunani, Pappus dari Alexandria, memberikan beberapa bukti teorema Pythagoras. Tahun sekitar 560 M orang Cina membuktikan teorema Pythagoras untuk segitiga (3,4,5). Pada kurun 836 – 901 Thabit Ibn Qurrah memberikan bukti terbaru dengan *dissection*. Pada 1150 M Bhaskara II dari India menulis *Lilavati*, judul buku matematika yang menggunakan nama anak gadisnya. Buku tersebut berisi tiga belas bab, terutama tentang definisi, istilah-istilah aritmetika, perhitungan bunga, barisan aritmetika dan geometri, geometri bidang, geometri ruang, bayangan gnomon, Kuṭṭaka - metode untuk memecahkan persamaan tak tentu, dan kombinasi (Wikipedia, 2023). Tahun sekitar 1500 M Da Vinci menerbitkan bukti-bukti baru. Tahun 1873 Perigal menerbitkan penemuan ulang bukti-bukti *dissection* Ibn Qurrah. Tahun 1876 James Garfield, yang kemudian menjadi presiden AS, menerbitkan bukti teorema Pythagoras. Pada 1891, pada usia 12 tahun Einstein membuktikan teorema Pythagoras. Pada 1905 teorema Pythagoras digunakan di dalam teori khusus tentang relativitas (dalam bentuk dimensi empat). Tahun 1910 Qulbum menerbitkan penemuan kembali bukti-bukti *dissection* Ibn Qurrah.

Tahun 1907 Loomis mengumpulkan semua (371) bukti teorema Pythagoras yang sudah diketahui dan diterbitkan 1927. Edisi kedua yang terbit 1940 dan tahun 1968 serta cetakan ulang tahun 1972 oleh NCTM memuat 615 bukti yang dikelompokkan menjadi empat kategori. Keempat kategori tersebut adalah bukti aljabar (sebanyak 109), bukti geometris (sebanyak 247), bukti *quaternionic* (berbasis vektor, sebanyak 4), dan bukti dinamika (menggunakan konsep gaya, sebanyak 255). Eli Maor (2007) menerbitkan buku *The Pythagorean Theorem - A 4000-Year History*, yang salah satu babnya mengulas tentang Loomis dan karyanya tersebut.


244 THE PYTHAGOREAN PROPOSITION

Having begged the question in both equations, (1) and (2), Professor Ingraham has, no doubt, unconsciously, fallen under the formal fallacy of *petitio principii*.

c. From the preceding array of proofs it is evident that the algebraic and geometric proofs of this most important truth are as unlimited in number as are the ingenious resources and ideas of the mathematical investigator.

NO TRIGONOMETRIC PROOFS

Facing forward the thoughtful reader may raise the question: Are there any proofs based upon the science of trigonometry or analytical geometry?

There are no trigonometric proofs, because all the fundamental formulae of trigonometry are themselves based upon the truth of the Pythagorean Theorem; because of this theorem we say $\sin^2 A + \cos^2 A = 1$, etc. Triginometry *is* because the Pythagorean Theorem *is*.

Therefore the so-styled Trigonometric Proof, given by J. Versluys, in his Book, Zes en Negentig Bewijzen, 1914 (a collection of 96 proofs), p. 94, proof 95, is not a proof since it employs the formula $\sin^2 A + \cos^2 A = 1$.

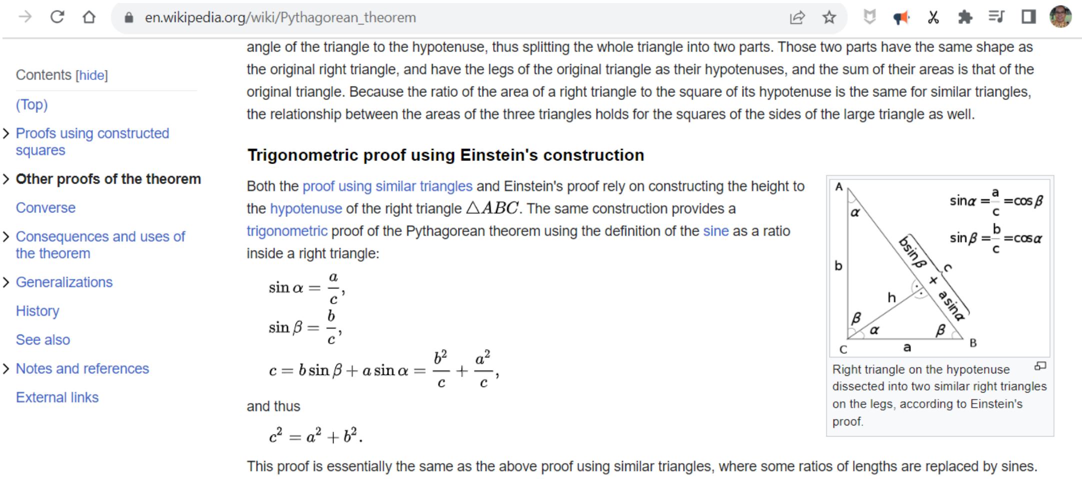
As Descartes made the Pythagorean theorem the basis of his method of analytical geometry, no independent proof can here appear. Analytical Geometry is Euclidian Geometry treated algebraically and hence involves all principles already established.

Therefore in analytical geometry all relations concerning the sides of a right-angled triangle imply or rest directly upon the Pythagorean theorem as is shown in the equation, viz., $x^2 + y^2 = r^2$.

And The Calculus being but an algebraic investigation of geometric variables by the method of limits it accepts the truth of geometry as established, and therefore furnishes no new proof, other than that, if squares be constructed upon the three

Gb. 4. Halaman buku "The Pythagorean Proposition" yang memuat pernyataan bahwa bukti teorema Pythagoreas dengan trigonometri tidak mungkin

Jason Zimba (2009) menulis artikel yang memuat bukti teorema Pythagoras menggunakan rumus trigonometri selisih dua sudut lancip. Alexander Bogomolny (1996 -2016) menerbitkan kumpulan 122 bukti teorema Pythagoras pada laman Web pribadinya, **Cut the Knot**. Salah satu bukti yang Bogomolny sajikan adalah bukti Zimba dan kemudian ia mengakui keyakinannya selama ini yang setuju dengan Loomis salah. Pada Maret 2023 dua siswi SMA, Calcea Johnson dan Ne'Kiya Jackson dari St. Mary's Academy, New Orlean, menyajikan sebuah presentasi berjudul "*An Impossible Proof of Pythagoras*" dengan menggunakan deret geometri tak berhingga dan aturan sinus, pada pertemuan **AMS Spring Southeastern Section** tanggal 18 Maret 2023. Pada abad 21 sekarang ini, teorema Pythagoras sudah digunakan di dalam berbagai bidang dan ilmu pengetahuan, termasuk konstruksi bangunan/gedung, trigonometri, kalkulus, pemetaan, musik, dan fisika, serta bidang-bidang lain.



en.wikipedia.org/wiki/Pythagorean_theorem

Contents [hide]
(Top)
Proofs using constructed squares
Other proofs of the theorem
Converse
Consequences and uses of the theorem
Generalizations
History
See also
Notes and references
External links

angle of the triangle to the hypotenuse, thus splitting the whole triangle into two parts. Those two parts have the same shape as the original right triangle, and have the legs of the original triangle as their hypotenuses, and the sum of their areas is that of the original triangle. Because the ratio of the area of a right triangle to the square of its hypotenuse is the same for similar triangles, the relationship between the areas of the three triangles holds for the squares of the sides of the large triangle as well.

Trigonometric proof using Einstein's construction

Both the proof using similar triangles and Einstein's proof rely on constructing the height to the hypotenuse of the right triangle $\triangle ABC$. The same construction provides a trigonometric proof of the Pythagorean theorem using the definition of the sine as a ratio inside a right triangle:

$$\sin\alpha = \frac{a}{c},$$

$$\sin\beta = \frac{b}{c},$$

$$c = b\sin\beta + a\sin\alpha = \frac{b^2}{c} + \frac{a^2}{c},$$

and thus

$$c^2 = a^2 + b^2.$$

Right triangle on the hypotenuse dissected into two similar right triangles on the legs, according to Einstein's proof.

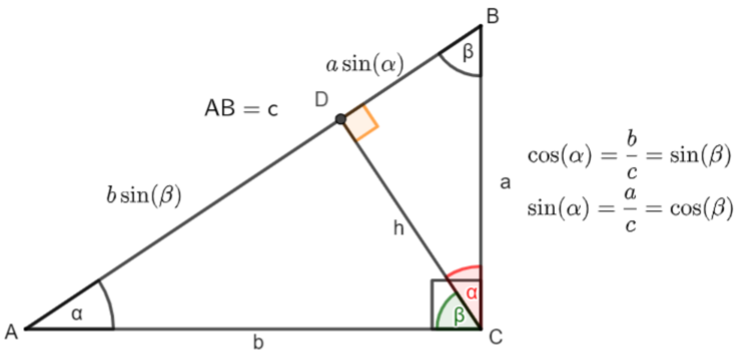
This proof is essentially the same as the above proof using similar triangles, where some ratios of lengths are replaced by sines.

Gb. 5. Halaman Wikipedia yang menunjukkan bukti sederhana teorema Pythagoras dengan trigonometri

Bukti $\sin^2(\alpha) + \cos^2(\alpha) = 1$ Tanpa Teorema Pythagoras

Pembuktian ini akan dilakukan dengan memperhatikan tiga kasus nilai α. Untuk kasus $\alpha = 0^o$, $\alpha = 90^o$, atau $\alpha = 180^o$ jelas buktinya, karena $\sin(0^o) = \sin(180^o) = \cos(90^o) = 0$ dan $\cos(0^o) = \cos(180^o) = \sin(90^o) = 1$ (berdasarkan definisi fungsi trigonometri dengan lingkaran satuan).

Untuk kasus $0^o < \alpha < 90^o$, perhatikan segitiga siku-siku ΔABC di bawah ini, siku-siku di C.



Gb. 6. Segitiga siku-siku dan garis tinggi dari titik sudut siku

Dari sini mungkin kita akan terjebak pada bukti dengan menggunakan teorema Pythagoras, apabila kita menuliskan

$$\sin^2(\alpha) + \cos^2(\alpha) = (\frac{a}{c})^2 + (\frac{b}{c})^2 = \frac{a^2+b^2}{c^2}. \tag{3}$$

Itulah yang selama ini diyakini orang, bahwa identitas trigonometri di atas adalah akibat dari teorema Pythagoras, padahal tidak. Perhatikan sisi miringnya, yakni:

$$c = b\sin(\beta) + a\sin(\alpha) = b\cos(\alpha) + a\sin(\alpha). \tag{4}$$

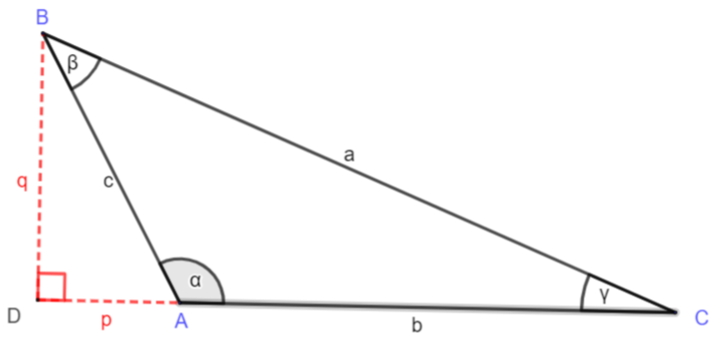
Apabila kedua ruas dibagi c diperoleh:

$$\begin{aligned} 1 &= \frac{b}{c}\cos(\alpha) + \frac{a}{c}\sin(\alpha) \\ &= \cos(\alpha).\cos(\alpha) + \sin(\alpha).\sin(\alpha) \\ &= \cos^2(\alpha) + \sin^2(\alpha). \blacksquare \end{aligned} \tag{5}$$

Bukti lain adalah menggunakan rumus jumlah dua sudut. Perhatikan, $\alpha + \beta = 90^o$, sehingga:

$$\begin{aligned} 1 &= \sin(90^o) \\ &= \sin(\alpha + \beta) \\ &= \sin(\alpha)\cos(\beta) + \cos(\alpha)\sin(\beta) \\ &= \sin(\alpha).\sin(\alpha) + \cos(\alpha).\cos(\alpha) \\ &= \sin^2(\alpha) + \cos^2(\alpha). \blacksquare \end{aligned} \tag{6}$$

Selanjutnya untuk kasus $90^0 < \alpha < 180^0$, perhatikan segitiga tumpul ΔABC di bawah ini.



Gb. 7. Segitiga tumpul dan salah satu garis tingginya

Pada segitiga tersebut berlaku $180^o - \alpha = \beta + \gamma$. dan juga bahwa $0^0 < \beta < 90^o$ dan $0^0 < \gamma < 90^o$. Di lain pihak, kita memiliki kesamaan trigonometri (dapat ditunjukkan dengan definisi fungsi trigonometri menggunakan lingkaran satuan):

$$\sin(180^o - \alpha) = \sin(\alpha) \text{ dan } \cos(180^o - \alpha) = -\cos(\alpha). \tag{7}$$

Nah, lagi-lagi, di sini kita dapat tergoda untuk menggunakan teorema Pythagoras pada ΔABD apabila kita menggunakan kesamaan dan definisi

$$\sin(\alpha) = \sin(180^o - \alpha) = \frac{q}{c} \text{ dan } \cos(\alpha) = -\cos(180^o - \alpha) = -\frac{p}{c}.$$

Dengan menggunakan relasi $180^0 - \alpha = \beta + \gamma$ kita dapat memperoleh bukti (1) tanpa menggunakan (2). Pertama, kita lihat

$$\begin{aligned} \sin(\alpha) &= \sin(180^o - \alpha) \\ &= \sin(\beta + \gamma) \\ &= \sin(\beta)\cos(\gamma) + \cos(\beta)\sin(\gamma) \end{aligned} \tag{8}$$

dan

$$\begin{aligned}\cos(\alpha) &= -\cos(180^o - \alpha)\\ &= -\cos(\beta + \gamma)\\ &= -(\cos(\beta)\cos(\gamma) - \sin(\beta)\sin(\gamma))\\ &= \sin(\beta)\sin(\gamma) - \cos(\beta)\cos(\gamma). \end{aligned} \tag{9}$$

sehingga

$$\begin{aligned}\sin^2(\alpha) &= (\sin(\beta)\cos(\gamma) + \cos(\beta)\sin(\gamma))^2\\ &= \sin^2(\beta)\cos^2(\gamma) + \cos^2(\beta)\sin^2(\gamma) + 2\sin(\beta)\cos(\gamma)\cos(\beta)\sin(\gamma) \end{aligned} \tag{10}$$

dan

$$\begin{aligned}\cos^2(\alpha) &= (\sin(\beta)\sin(\gamma) - \cos(\beta)\cos(\gamma))^2\\ &= \sin^2(\beta)\sin^2(\gamma) + \cos^2(\beta)\cos^2(\gamma) - 2\sin(\beta)\sin(\gamma)\cos(\beta)\cos(\gamma) \end{aligned} \tag{11}$$

Dari kesamaan (10) dan (11) diperoleh

$$\begin{aligned}\sin^2(\alpha) + \cos^2(\alpha) &= \sin^2(\beta)(\cos^2(\gamma) + \sin^2(\gamma))\\ &\quad + \cos^2(\beta)(\sin^2(\gamma) + \cos^2(\gamma))\\ &= \sin^2(\beta).1 + \cos^2(\beta).1\\ &= 1.\blacksquare \end{aligned} \tag{12}$$

Bukti serupa dapat diperoleh dengan menggunakan garis tinggi dari titik C dan menggunakan rumus jumlah dua sudut. Sekali lagi, pembuktian di atas tidak tergantung sama sekali dengan teorema Pythagoras. Apakah hasil tersebut dapat digunakan untuk membuktikan teorema Pythagoras? Inilah yang akan kita bahas pada bagian selanjutnya.

Bogomolny (2018), setelah mengakui salah atas keyakinannya yang semula sepaham dengan Loomis, juga menyajikan bukti identitas tersebut menggunakan integral tak tentu. Perhatikan perhitungan integral tak tentu $I = \int \cos(x)\sin(x)\,dx$. Integral ini dapat ditentukan dengan dua cara.

$$I = \int \cos(x)\sin(x)\,dx = \frac{1}{2}\sin^2(x) + C_1 \tag{13}$$

$$= \int \sin(x)\cos(x)\,dx = -\frac{1}{2}\cos^2(x) + C_2. \tag{14}$$

Jadi,

$$\frac{1}{2}\sin^2(x) + C_1 = -\frac{1}{2}\cos^2(x) + C_2, \tag{15}$$

atau

$$\sin^2(x) + \cos^2(x) = C. \tag{16}$$

Nilai C dengan mudah diperoleh, misalnya dengan memilih $x = 0$ (dalam integral di atas x adalah bilangan riil). $\blacksquare$

Bukti yang paling tidak biasa dan sangat singkat dapat ditemukan di buku Maor (2007, p. 121), sebagai berikut.

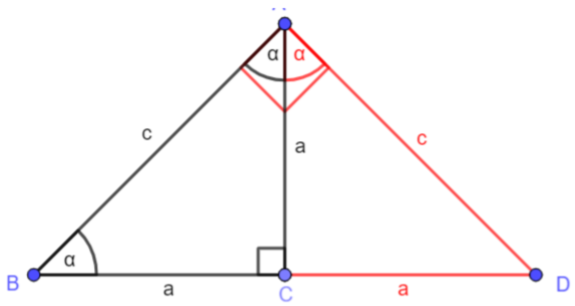
$$\begin{aligned} 1 &= \cos 0 = \cos(x - x) \\ &= \cos(x)\cos(x) + \sin(x)\sin(x) \\ &= \cos^2(x) + \sin^2(x). \blacksquare \end{aligned} \tag{17}$$

Jadi, jelas bahwa identitas trigonometri (1) tidak tergantung pada teorema Pythagoras (2) dan identitas tersebut berlaku untuk semua nilai sudut α. Penerapan (1) pada segitiga siku-siku justru akan memberikan bukti (2). Sebaliknya, penggunaan (2) untuk membuktikan (1) tersebut sebenarnya hanya terbatas pada nilai-nilai α selain $k.\frac{\pi}{2}$, untuk k bilangan bulat. Untuk nilai-nilai α tersebut, teorema Pythagoras tidak dapat digunakan (segitiga siku-sikunya tidak ada!) dan hanya dapat menggunakan definisi trigonometri pada lingkaran satuan atau definisi lain yang tidak berbasis segitiga siku-siku.

Bukti Teorema Pythagoras dengan Trigonometri

Teorema Pythagoras sudah menarik perhatian orang ribuan tahun yang lalu sejak zaman Babilonia. Ratusan bukti teorema Pythagoras sudah ditulis para ahli matematika dan sudah dianalisis, didemonstrasikan dan dikelompokkan menjadi empat kategori oleh Elisha Scott Loomis dalam bukunya "*The Pythagorean Proposition*" (1927). Setelah itu pun beberapa ilmuwan sudah memberikan buktinya, misalnya Einstein, sebagaimana diuraikan pada halaman Wikipedia (2023). Meskipun sampai kehadiran buku Loomis tersebut masih diyakini bahwa bukti teorema Pythagoras menggunakan trigonometri tidak mungkin, namun kenyataannya kemudian beberapa ahli atau peminat matematika sudah berusaha menunjukkan bukti (2) menggunakan trigonometri. Zimba (2009) menunjukkan bukti (2) menggunakan rumus trigonometri selisih dua sudut. Dia juga menyebutkan bahwa (2) merupakan akibat dari identitas (1) apabila α adalah salah satu sudut lancip pada segitiga siku-siku. Wikipedia (2023, seperti dapat dilihat pada **Gambar 5**) juga menunjukkan teorema Pythagoras dengan menggunakan definisi trigonometri pada segitiga siku-siku. Baru-baru ini (Maret 2023), dua anak SMA, Calcea Johnson dan Ne'Kiya Jackson dari St. Mary's Academy, New Orlean, menyajikan sebuah presentasi berjudul "*An Impossible Proof of Pythagoras*" untuk menunjukkan bukti teorema Pythagoras menggunakan trigonometri.

Selain bukti yang sudah ditunjukkan oleh Zimba dan Wikipedia tersebut, terdapat pendekatan lain yang juga menggunakan trigonometri. Salah satunya adalah untuk kasus segitiga siku-siku sama kaki. Perhatikan ilustrasi di bawah ini, di mana $\alpha = 45^o$.



Gb. 8. Segitiga siku-siku sama kaki

Pada ilustrasi tersebut, berlaku

$$\frac{a}{c} = \sin(\alpha) = \frac{c}{2a}. \tag{18}$$

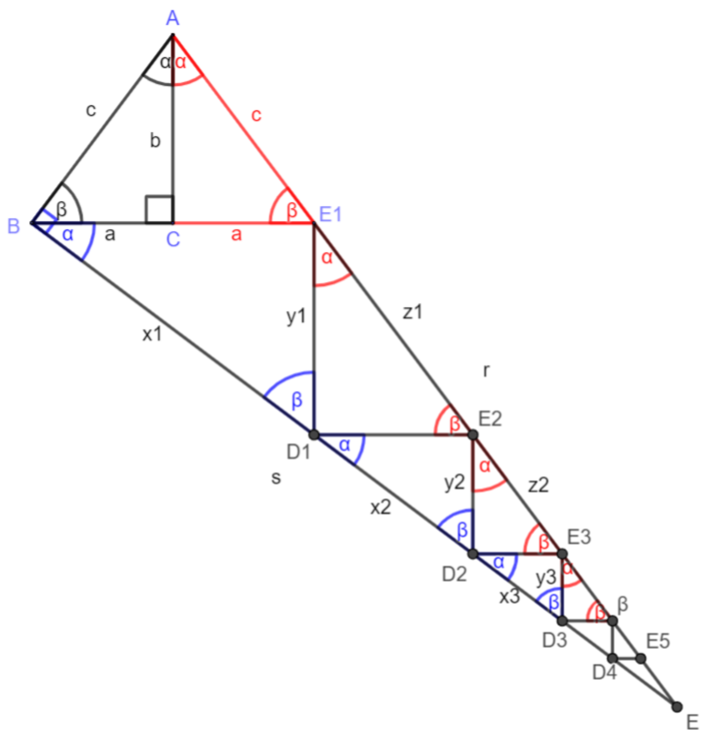
Jadi,

$$c^2 = 2a^2 = a^2 + a^2. \tag{19}$$

Artinya, pada segitiga siku-siku sama kaki dengan panjang sisi siku-siku $b = a$ dan panjang sisi miring c berlaku

$$a^2 + b^2 = c^2. \blacksquare \tag{20}$$

Untuk kasus segitiga siku-siku yang tidak sama kaki, yakni panjang siku-siku $b \neq a$ dan panjang sisi miring c, Johnson dan Jackson (2023) menunjukkan bukti sebagai berikut.



Gb. 9. Konstruksi segitiga siku-siku sebangun untuk pembuktian teorema Pythagoreas oleh Johnson and Jackson (2023)

Dari ilustrasi tersebut dapat diketahui dan diturunkan identitas-identitas sebagai berikut.

$$\sin(\beta) = \frac{b}{c} = \frac{2a}{x_1}, \text{ sehingga } x_1 = \frac{2ac}{b} \tag{21}$$

$$\sin(\alpha) = \frac{a}{c} = \frac{y_1}{x_1} = \frac{y_1}{\frac{2ac}{b}}, \text{ sehingga } y_1 = \frac{2a^2}{b} \tag{22}$$

$$\sin(\beta) = \frac{b}{c} = \frac{y_1}{z_1} = \frac{\frac{2a^2}{b}}{z_1}, \text{ sehingga } z_1 = \frac{2a^2c}{b^2}. \tag{23}$$

Dengan memperhatikan kesebangunan segitiga-segitiga siku-siku pada ilustrasi di atas, yakni

$$\Delta BD_1E_1 \sim \Delta E_1E_2D_1 \sim \Delta D_1D_2E_2 \sim \Delta E_2E_3D_2 \sim \Delta D_2D_3E_3 \sim \ldots, \tag{24}$$

kita tahu bahwa nilai-nilai

$$x_1,\ z_1,\ x_2,\ z_2,\ x_3,\ z_3, \ldots \tag{25}$$

membentuk barisan geometri dengan rasio

$$\frac{z_1}{x_1} = \frac{a}{b}. \tag{26}$$

Perhatikan, ΔAEB adalah siku-siku di B. Sekarang akan dihitung panjang sisi BE dan AE dengan menggunakan deret geometri tak berhingga.

$$\begin{aligned} BE &= x_1 + x_2 + x_3 + \ldots \\ &= \frac{2ac}{b} + \frac{2a^3c}{b^3} + \frac{2a^5c}{b^5} + \ldots \\ &= \frac{\frac{2ac}{b}}{1 - (\frac{a}{b})^2} \\ &= \frac{2abc}{b^2 - a^2}. \end{aligned} \tag{27}$$

$$\begin{aligned} AE &= c + z_1 + z_2 + z_3 + \ldots \\ &= c + \frac{2a^2c}{b^2} + \frac{2a^4c}{b^4} + \frac{2a^6c}{b^6} + \ldots \\ &= c + \frac{\frac{2a^2c}{b^2}}{1 - (\frac{a}{b})^2} \\ &= c + \frac{2a^2c}{b^2 - a^2} \\ &= = \frac{c(a^2 + b^2)}{b^2 - a^2}. \end{aligned} \tag{28}$$

Dengan memperhatikan ΔAEB siku-siku di B, maka

$$\begin{aligned} \sin 2\alpha &= \frac{BE}{AE} = \frac{\frac{2abc}{b^2-a^2}}{\frac{c(a^2+b^2)}{b^2-a^2}} \\ &= \frac{2ab}{a^2 + b^2}. \end{aligned} \tag{29}$$

Sekarang, dengan memperhatikan ΔABE_1 dan menggunakan aturan sinus kita peroleh

$$\begin{aligned}\frac{\sin 2\alpha}{2a} &= \frac{\sin(\beta)}{c} = \frac{\frac{b}{c}}{c} = \frac{b}{c^2} \\ \sin 2\alpha &= \frac{2ab}{c^2}.\end{aligned} \tag{30}$$

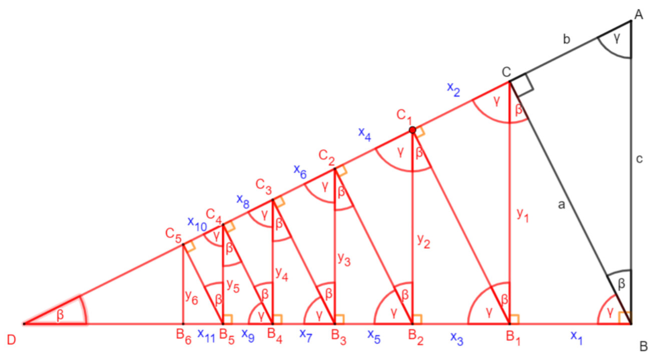
Jadi,

$$\frac{2ab}{a^2+b^2} = \frac{2ab}{c^2}. \tag{31}$$

Kesimpulannya adalah

$$a^2+b^2=c^2.\blacksquare \tag{32}$$

Penalaran serupa akan memberikan bukti yang sama, namun lebih sederhana dan hanya menggunakan definisi sinus pada segitiga siku-siku, dengan bantuan konstruksi yang lebih sederhana pula, seperti ditunjukkan pada **Gambar 10**. Sejauh penulis ketahui, konstruksi seperti ini belum pernah dipublikasikan dalam pembuktian (2). Jadi, ini merupakan konstruksi segitiga siku-siku sebangun yang baru, terinspirasi dari konstruksi Johnson and Jackson, untuk membuktikan (2).



Gb. 10. Konstruksi segitiga siku-siku sebangun untuk bukti teorema Pythagoras
dengan trigonometri

$$\sin(\beta) = \frac{b}{c} = \frac{x_1}{a}, \text{ sehingga } x_1 = \frac{ab}{c} \tag{33}$$

$$\sin(\alpha) = \frac{a}{c} = \frac{y_1}{a}, \text{ sehingga } y_1 = \frac{a^2}{c} \tag{34}$$

$$\sin(\beta) = \frac{b}{c} = \frac{x_2}{y_1} = \frac{x_2}{\frac{a^2}{c}}, \text{ sehingga } x_2 = \frac{a^2 b}{c^2}. \tag{35}$$

Karena

$$\Delta ABC \sim \Delta BCB_1 \sim \Delta CB_1C_1 \sim \Delta B_1C_1B_2 \sim \Delta C_1B_2C_2 \sim \ldots, \tag{36}$$

maka

$$b,\ x_1,\ x_2,\ x_3,\ x_4,\ x_5, \ldots \tag{37}$$

membentuk barisan geometri dengan rasio

$$\frac{x_1}{b} = \frac{a}{c}. \tag{38}$$

Perhatikan, ΔDAB adalah siku-siku di B. Sekarang kita cukup menghitung AD, untuk pembuktiannya. Dengan menggunakan deret geometri tak berhingga, kita peroleh

$$\begin{aligned} AD &= b + x_2 + x_4 + x_6 + \ldots \\ &= b + \frac{a^2 b}{c^2} + \frac{a^4 b}{c^4} + \frac{a^6 b}{c^6} + \ldots \\ &= \frac{b}{1 - (\frac{a}{c})^2} \\ &= \frac{bc^2}{c^2 - a^2}. \end{aligned} \tag{39}$$

Sementara itu, kita memiliki

$$\frac{b}{c} = \sin(\beta) = \frac{AB}{AD} = \frac{c}{\frac{bc^2}{c^2 - a^2}}, \tag{40}$$

sehingga

$$\begin{aligned} c^2 &= \frac{b^2 c^2}{c^2 - a^2} \\ 1 &= \frac{b^2}{c^2 - a^2} \\ c^2 &= a^2 + b^2. \blacksquare \end{aligned} \tag{41}$$

Terdapat bukti trigonometri yang lain, yakni menggunakan identitas-identitas trigonometri yang lain, misalnya menggunakan aturan kosinus. Sudah tentu untuk menggunakan suatu identitas trigonometri dalam membuktikan teorema Pythagoras, identitas trigonometri tersebut harus dapat dibuktikan tanpa menggunakan teorema Pythagoras. Kenyataannya memang demikian, identitas trigonometri seperti aturan kosinus $c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos(\gamma)$ dapat dibuktikan tanpa menggunakan teorema Pythagoras, dan dengan demikian teorema Pythagoras dapat dipandang sebagai akibat dari aturan kosinus tersebut. Dengan kata lain, teorema Pythagoras merupakan kasus khusus (penerapan pada segitiga siku-siku) aturan kosinus. Sayangnya, dalam berbagai teks matematika sering dikatakan bahwa aturan kosinus merupakan generalisasi teorema Pythagoras.

Simpulan dan Implikasi

Telah ditunjukkan bahwa identitas trigonometri (1), yang selama ini sering dikatakan sebagai akibat dari teorema Pythagoras (2), dan kebanyakan buktinya juga menggunakan (2), serta sering disebut sebagai **identitas Pythagoras**, dapat dibuktikan tanpa menggunakan (2). Hal serupa juga terjadi pada identitas trigonometri yang lain, misalnya aturan kosinus, yang hampir semua bukti di buku-buku teks matematika menggunakan dan sekaligus dikatakan sebagai **generalisasi** (2). Di sini lain juga dikatakan bahwa (2) merupakan **kasus khusus** dari aturan kosinus. Dua pernyataan ini memuat logika berpikir melingkar, sesuatu yang digunakan untuk pembuktian dikatakan sebagai kasus khusus hal yang dibuktikan. Oleh karena itu, seharusnya salah satu pernyataan tidak digunakan. Jika teorema Pythagoras dipandang sebagai kasus khusus aturan kosinus (memang demikian!), maka aturan kosinus tidak dapat dikatakan sebagai generalisasi teorema Pythagoras. Demikian juga, identitas trigonometri (1) seharusnya tidak dapat dikatakan sebagai identitas Pythagoras, karena ia adalah kasus khusus dari (1).

Hal kedua yang telah ditunjukkan adalah bahwa teorema Pythagoras, yang selama ini diyakini tidak dapat dibuktikan dengan trigonometri, ternyata dapat dibuktikan dengan menggunakan trigonometri. Di antara bukti trigonometri tersebut adalah menggunakan identitas (1), aturan sinus, definisi fungsi trigonometri pada segitiga siku-siku, dan aturan kosinus. Kenyataan ini memperkuat pernyataan bahwa teorema Pythagoras dapat dipandang sebagai kasus khusus beberapa identitas trigonometri, terutama (1) dan aturan kosinus.

Dengan demikian perlu dilakukan peninjauan kembali cara-cara menyajikan topik yang terkait dengan teorema Pythagoras dan trigonometri pada buku-buku matematika maupun pelajaran matematika, serta cara dan pendekatan pembelajaran topik-topik tersebut. Memang pembuktian beberapa identitas trigonometri menggunakan teorema Pythagoras akan terlihat lebih sederhana. Akan tetapi, jika demikian, seharusnya tidak dapat dikatakan bahwa identitas trigonometri tertentu merupakan generalisasi teorema Pythagoras atau bahkan menggunakan atribut Pythagoras.

Referensi

Bogomolny, Alexander. 2016. *Pythagorean Theorem*. http://www.cut-the-knot.org/pythagoras/index.shtml (4-8-2023).

Bogomolny, Alexander. 2018. *More Trigonometric Proofs of the Pythagorean Theorem*. https://www.cut-the-knot.org/pythagoras/TrigProofs.shtml (4-8-2023).

Britanica Online. 2023. *Pythagorean theorem*. https://www.britannica.com/science/Pythagorean-theorem (4-8-2023).

History of Mathematics Project. 2021. *Pythagorean Theorem*.https://www.history-of-mathematics.org/PythagoreanTheorem.html (2-8-2023).

lreyes. 2023. *Timeline of Pythagorean Theorem*. https://www.timetoast.com/timelines/timeline-of-pythagorean-theorem (2-8-2023)

Leinsmire, John. 2023. *New Proof of the Pythagorean Theorem? - Thursday Tidbit*. https://www.youtube.com/watch?v=pHlkkT-Y9YM.

Loomis, E. S. 1968. *The Pythagorean Proposition*. NCTM.

Maor, Eli. 2007. *The Pythagorean theorem: a 4,000-year history*. New Jersey: Princeton University Press.

MindYourDecisions. 2023. After 2,000 Years, Students Find An Impossible Proof $a^2 + b^2 = c^2$. https://www.youtube.com/watch?v=juFdo2bijic (3-8-2023).

Polymathematic. 2023. *Pythagoras Would Be Proud: High School Students' New Proof of the Pythagorean Theorem [TRIGONOMETRY]*. https://www.youtube.com/watch?v=p6j2nZKwf20 (3-8-2023).

Wikipedia contributors. (2023, March 15). Līlāvatī. In *Wikipedia, The Free Encyclopedia*. https://en.wikipedia.org/wiki/Līlāvatī (4-8-2023).

Wikipedia contributors. (2023, May 7). Pythagorean theorem. In *Wikipedia, The Free Encyclopedia*. https://en.wikipedia.org/Pythagorean_theorem (2-8-2023).

Zimba, Jason. 2009. On the Possibility of Trigonometric Proofs of the Pythagorean Theorem. *Forum Geometricorum*. Volume 9 (2009) 275-278.